Université Sidi Mohammed Ben abdellah **Année universitaire 2020-2021**
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées **Filière CP2 Algèbre 3**
Fès **H. Benbouziane**

Série de T.D. $N^\circ.2$
Applications Multilinéaires- Formes.b.s- Formes quadratiques

Exercice 0.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\phi : E \times E \times E \to \mathbb{R}$ une forme trilinéaire alternée. Soit $B = \{u, v, w\}$ une famille liée. Montrer que $\phi(u, v, w) = 0$.*

Exercice 0.2 *On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique. On notera $U = (x, y, z)$ et $V = (x', y', z')$.*

1. *Montrer que l'application définie par $\varphi(U, V) = 3xx' - 5yy' - 2xy' - 2x'y + 3yz' + 3y'z$ est une forme bilinéiare symétrique et donner sa matrice dans la base canonique.*
2. *Ecrire la forme de la forme bilinéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$,*

Exercice 0.3 *Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique telle que :*

$$q(x, y, z, t) = 4x^2 - 4y^2 - 16xz + 16yz + zt.$$

1. *Déterminer sa forme polaire φ et la matrice de φ relativement à la base canonique.*
2. *Déterminer la décomposition de Gauss de la f quadratique q.*
3. *Quel est son rang ? Quel est la signature ?.*
4. *Trouver une base qui soit q -orthogonale.*

Exercice 0.4 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 2. On considère l'application $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que $\psi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q'(t)dt$.*

1. *Vérifier que ψ est bien une forme bilinéaire.*
2. *Donner sa matrice par rapport à la base canonique de E. Cette forme est -elle dégénérée ?*
3. *ψ est -elle symétrique ? antisymétrique ?*
   Déterminer la partie symétrique ψ_s ainsi que sa partie antisymétrique ψ_s.
4. *Montrer $\psi(P, P) \leqslant 0 \iff | P(1) | \leqslant | P(0) |$. ψ est elle définie positive. ?*

Exercice 0.5 *Réduire les formes quadratiques suivantes et en déduire leur rang :*

1. *$q_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 2yz + xz$.*
2. *$q_1(x, y, z) = xy + yz + 2xz$.*
3. *En déduire pour chacune d'elles une base orthogonale pour la forme polaire associée.*

Exercice 0.6 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et b une forme bilinéaire symétrique. Soient A et B deux parties de E. On note par $A^\perp$ l'orthogonal de A relativement à la f.b.symétrique b.*
Montrer que :
(1) *$A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.* (2) *$A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.*
(3) *$A^\perp = (vect(A))^\perp$.* (4) *$A \subset (A^\perp)^\perp$.*
(5) *A et B ss espaces vect de E. Montrer que : $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ et que $A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$.*

Exercice 0.7 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz - Inégalité de Minkowski)*
Soit q une forme quadratique ***positive*** *sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E et φ sa forme bilinéaire symétrique associée.*

1. *Montrer que $(\forall \lambda \in \mathbb{K})\ (\forall x, y \in E)$: $q(x+\lambda y) = \lambda^2 q(y) + 2\lambda\varphi(x,y) + q(x)$.*
2. *Montrer que $(\forall x, y \in E)$: $(\varphi(x,y))^2 \leq q(x)q(y)$.*
   Indication : $P(\lambda) = q(x+\lambda y)$ est un polynôme de degré 2.
3. *Supposons de plus que la forme quadratique q est définie positive.*
   Montrer : $(\varphi(x,y))^2 = q(x)q(y) \iff x$ et y sont liés.
4. *Montrer que $\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$ pour tout $x, y \in E$.*

Exercice 0.8 *Soient f et g deux formes linéaires sur E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Montrer que l'application ψ donnée par : $\psi(u,v) = f(u)g(v)$, est bilinéiare.*
2. *Exprimer les formes bilinéaires symétrique ψ_s et antisymétrique ψ_a associées.*
3. *Montrer que si f et g sont injectives alors ψ_s est non-dégénérée.*

Exercice 0.9 *Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique telle que :*

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + at^2 + 2xy + 4bxz + 4byz + 2cyt.$$

1. *Déterminer sa forme polaire φ ainsi que la matrice de q relativement à la base canonique.*
2. *Déterminer la décomposition de Gauss de la f quadratique q.*
3. *Déterminer le rang et la signature de q en fonction de a, b et c.*
4. *Trouver une base qui soit q -orthogonale dans le cas où $(a,b,c) = (2;0,1)$.*

Exercice 0.10 *On considère, dans $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique suivante : $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 4xz$.*

1. *Ecrire la forme polaire et sa matrice M dans la base canonique.*
2. *Réduire la forme quadratique q.*
3. *Quel est son rang ? Quel est son noyau ?.*
4. *Trouver une base qui diagonalise la matrice M.*

Exercice 0.11 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 2. On considère l'application $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que $\psi(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)$.*

1. *Vérifier que ψ est bien une forme bilinéaire symétrique. Donner sa matrice par rapport à la base canonique de E.*
2. *On consudère la famille $\mathcal{B} = \{1 - X^2, X, X^2\}$.*
   - *(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.*
   - *(b) Déterminer la matrice de ψ dans cette base.*
   - *(c) En déduire l'expression, dans cette base, de ψ et de la forme quadratique q associée.*
   - *(d) Déterminer l'ensemble I_q des vecteurs isotropes pour q.*
3. *On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(0) = 0\}$.*
   - *(a) Montrer que F est un hyperplan de E en déterminat une base de F.*
   - *(b) Déterminer l'orthogonal de F relativement à ψ.*